

NO.

0058

ラグランジュの補助方程式と初期条件による 1 階非線形偏微分方程式の求解 ($xu_x - yu_y = u^2$)

$Pu_x + Qu_y = R$ の形の方程式は、ラグランジュの補助方程式 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$ から独立な 2 つの第一積分 $\varphi(x, y, u) = c_1$, $\psi(x, y, u) = c_2$ を求め、一般解を $F(\varphi, \psi) = 0$ (または $\varphi = f(\psi)$) の形で表したうえで、初期条件を代入して任意関数を決定する方針で解く。

補助方程式は

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{u^2}$$

最初の 2 式 $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ を積分すると

$$\ln x = -\ln y + c'_1 \implies \varphi = xy = c_1$$

次に $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}$ を積分すると

$$\ln x = -\frac{1}{u} + c'_2 \implies \psi = \frac{1}{u} + \ln x = c_2$$

よって一般解は $\psi = g(\varphi)$ 、すなわち

$$\frac{1}{u} + \ln x = g(xy)$$

の形になる。初期条件 $u(x, 1) = x$ ($y = 1$) を代入すると、このとき $xy = x$ であり

$$\frac{1}{x} + \ln x = g(x)$$

したがって $g(s) = \frac{1}{s} + \ln s$ 。これを一般解に戻すと ($s = xy$)

$$\frac{1}{u} + \ln x = \frac{1}{xy} + \ln(xy) = \frac{1}{xy} + \ln x + \ln y$$

$$\implies \frac{1}{u} = \frac{1}{xy} + \ln y$$

よって

$$u = \frac{xy}{1 + xy \ln y}$$

(検算 1: 初期条件) $y = 1$ とすると $u = \frac{x}{1 + x \ln 1} = \frac{x}{1 + 0} = x$ となり、 $u(x, 1) = x$ を満たす。

(検算 2: 方程式) $w = 1/u = \frac{1}{xy} + \ln y$ とおくと

$$w_x = -\frac{1}{x^2 y}, \quad w_y = -\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{y}$$

$w = 1/u$ より $u_x = -u^2 w_x$, $u_y = -u^2 w_y$ であるから

$$xu_x - yu_y = -u^2 (xw_x - yw_y) = -u^2 \left(-\frac{1}{xy} - \left(-\frac{1}{xy} + 1 \right) \right) = -u^2 \left(-\frac{1}{xy} + \frac{1}{xy} - 1 \right) = u^2$$

となり、方程式 $xu_x - yu_y = u^2$ を満たすことが確認できる。