

NO.

0059

波動方程式の一般解（ダランベールの解の導出）

方針: 特性変数 $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ への変数変換で連鎖律を用いて u_{tt}, u_{xx} を書き換えると、波動方程式が $u_{\xi\eta} = 0$ という簡単な形に帰着する。これを逐次積分すれば一般解が得られる。

$\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ とおくと、連鎖律より

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}$$

であるから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

これらを $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ に代入すると

$$c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = c^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \implies -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \implies u_{\xi\eta} = 0$$

($c \neq 0$ より)。 $u_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$ を η について積分すると、 $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ は η に依存しない、すなわち ξ のみの関数 $F(\xi)$ に等しい。さらに ξ について積分すると

$$u(\xi, \eta) = \int F(\xi) d\xi + g(\eta) =: f(\xi) + g(\eta)$$

(f, g は任意の C^2 級関数)。元の変数 x, t に戻すと

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

検算: $u_x = f' + g'$, $u_{xx} = f'' + g''$ 。 $u_t = -cf' + cg'$, $u_{tt} = c^2 f'' + c^2 g'' = c^2 u_{xx}$ となり、確かに波動方程式を満たす。