

NO.

0060

初期変位のみを持つ波動方程式のダランベールの公式による解

方針: 波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ の一般解 $u(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ に初期条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ を課すと、 f, g が φ, ψ で定まり

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

(ダランベールの公式) を得る。本問では $\psi \equiv 0$ の場合を扱う。

ダランベールの公式

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

において $\psi \equiv 0$ とすると積分項が消え

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2}$$

$\varphi(x) = e^{-x^2}$, $c = 2$ を代入すると

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(e^{-(x-2t)^2} + e^{-(x+2t)^2} \right)$$

検算: $t = 0$ のとき $u(x, 0) = \frac{1}{2}(e^{-x^2} + e^{-x^2}) = e^{-x^2} = \varphi(x)$ を満たす。 $u_t = \frac{1}{2} \left(4(x-2t)e^{-(x-2t)^2} - 4(x+2t)e^{-(x+2t)^2} \right)$ より $u_t(x, 0) = \frac{1}{2}(4xe^{-x^2} - 4xe^{-x^2}) = 0$ を満たす。また、各項は $x \mp 2t$ のみの関数であり、 $u = f(x-ct) + g(x+ct)$ の形に含まれるので、 $c = 2$ に対し波動方程式 $u_{tt} = 4u_{xx}$ を自動的に満たす。