

NO.

0061

初期速度のみを持つ波動方程式のダランベールの公式による解

方針: 波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ の一般解 $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ に初期条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ を課すと、 f, g が φ, ψ で定まり

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

(ダランベールの公式) を得る。本問では $\varphi \equiv 0$ の場合を扱う。

ダランベールの公式において $\varphi \equiv 0$ とすると

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

$\psi(x) = \cos x$, $c = 3$ を代入すると

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \cos s ds = \frac{1}{6} \left[\sin s \right]_{x-3t}^{x+3t} = \frac{1}{6} (\sin(x + 3t) - \sin(x - 3t))$$

和積公式 $\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$ より $\sin(x + 3t) - \sin(x - 3t) = 2 \cos x \sin 3t$ であるから

$$u(x, t) = \frac{1}{3} \cos x \sin 3t$$

検算: $u(x, 0) = \frac{1}{3} \cos x \sin 0 = 0$ を満たす。 $u_t = \cos x \cos 3t$ より $u_t(x, 0) = \cos x = \psi(x)$ を満たす。 $u_{tt} = -3 \cos x \sin 3t$ 。 $u_x = -\frac{1}{3} \sin x \sin 3t$, $u_{xx} = -\frac{1}{3} \cos x \sin 3t$ より $c^2 u_{xx} = 9 \times \left(-\frac{1}{3} \cos x \sin 3t \right) = -3 \cos x \sin 3t = u_{tt}$ となり、波動方程式を満たす。