

NO.

0062

熱伝導方程式の初期値・境界値問題（ディリクレ境界条件、単一固有モード）

手順 1: 変数分離。 $u(x, t) = X(x)T(t)$ において $u_t = k u_{xx}$ に代入すると

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

両辺を $kX(x)T(t)$ で割ると

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

左辺は t のみ、右辺は x のみの関数なのに両者が等しいので、その値は x にも t にも依存しない定数である。これを $-\lambda$ とおくと、2 本の常微分方程式

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T'(t) + k\lambda T(t) = 0$$

に分離される。

手順 2: 境界条件を X に移す。 $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ がすべての t で成り立つには、 $T \equiv 0$ （自明解）でない限り $X(0) = 0$ 。同様に $X(L) = 0$ 。

手順 3: 固有値問題を解く（ λ の場合分け）。

(i) $\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$X = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$X(0) = A = 0$$

$$X(L) = B \sinh(\mu L) = 0$$

$\sinh(\mu L) \neq 0$ より $B = 0$ 。自明解のみ。

(ii) $\lambda = 0$ のとき。

一般解は $X = A + Bx$ 。 $X(0) = A = 0$ 、 $X(L) = BL = 0$ より $B = 0$ 。自明解のみ。

(iii) $\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解は

$$X = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$X(0) = A = 0$$

$$X(L) = B \sin(\mu L) = 0$$

自明でない解 ($B \neq 0$) が存在するためには $\sin(\mu L) = 0$ 、すなわち

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

手順 4: 時間成分を解く。 $T' = -k\lambda_n T$ は変数分離形で

$$\frac{dT}{T} = -k\lambda_n dt \implies \ln |T| = -k\lambda_n t + C \implies T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$$

(定数倍は後の c_n に吸収させる。)

手順 5: 重ね合わせと初期条件。 各 $X_n(x)T_n(t)$ は方程式と境界条件を満たすので、線形性からその重ね合わせ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

も満たす。 $t = 0$ とおくと

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{\pi x}{L}$$

右辺はすでに $n = 1$ の固有関数そのものなので、係数比較により $c_1 = 1$ 、 $c_n = 0$ ($n \geq 2$) (固有関数系 $\{\sin \frac{n\pi x}{L}\}$ の直交性から、この対応は一意である)。よって

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

(検算: $u_t = -k(\pi/L)^2 \sin \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}$ 、 $u_{xx} = -(\pi/L)^2 \sin \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}$ より $u_t = ku_{xx}$ が成り立ち、 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 、 $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L}$ も満たす。)