

NO.

0063

熱伝導方程式の初期値・境界値問題（ディリクレ境界条件、2 モードの重ね合わせ）

境界条件がディリクレ型 ($u(0, t) = u(L, t) = 0$) なので、変数分離から固有値問題までの手順は次の通りである。 $u(x, t) = X(x)T(t)$ とおき方程式に代入すると

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

となり、 $X'' + \lambda X = 0$ 、 $X(0) = X(L) = 0$ の固有値問題を解くと、 $\lambda \leq 0$ では自明解しか得られず、 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ 、 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が固有値・固有関数である。時間成分は $T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$ 。よって一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

である。 $t = 0$ において初期条件と比べると

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 3 \sin \frac{\pi x}{L} - 2 \sin \frac{3\pi x}{L}$$

右辺はすでに固有関数 $\sin \frac{\pi x}{L}$ ($n = 1$) と $\sin \frac{3\pi x}{L}$ ($n = 3$) の線形結合なので、フーリエ係数の積分計算をするまでもなく係数比較で

$$c_1 = 3, \quad c_3 = -2, \quad c_n = 0 \quad (n \neq 1, 3)$$

と定まる（固有関数系の直交性により、この表し方は一意）。各モードは自分の固有値に応じた速さ $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ で独立に減衰するから、それぞれの係数に指数因子を付ければよい。よって

$$u(x, t) = 3 \sin \frac{\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t\right) - 2 \sin \frac{3\pi x}{L} \exp\left(-k \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

（検算：各項は問 1 と同じ形の固有モードであり、線形性から $u_t = ku_{xx}$ を満たす。境界： $x = 0, L$ で $\sin(n\pi x/L) = 0$ なので $u(0, t) = u(L, t) = 0$ 。初期条件： $t = 0$ で $e^0 = 1$ となり $u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{L} - 2 \sin \frac{3\pi x}{L}$ に一致。）