

NO.

0064

熱伝導方程式の初期値・境界値問題（ノイマン境界条件、断熱棒）

手順 1: 変数分離。 $u = X(x)T(t)$ とおくと

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + k\lambda T = 0$$

に分離される。今回はノイマン境界条件なので、 $u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0$ より $X'(0) = 0$ 、同様に $X'(L) = 0$ が X に課される。

手順 2: 固有値問題を解く（ λ の場合分け）。(i) $\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解とその導関数は

$$X = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x), \quad X' = A\mu \sinh(\mu x) + B\mu \cosh(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$X'(0) = B\mu = 0$$

$$X'(L) = A\mu \sinh(\mu L) = 0$$

 $\mu > 0$ より $B = 0$ 、 $\sinh(\mu L) \neq 0$ より $A = 0$ 。自明解のみ。(ii) $\lambda = 0$ のとき。

一般解とその導関数は $X = A + Bx$ 、 $X' = B$ 。 $X'(0) = X'(L) = B = 0$ とすれば A は任意でよく、**定数解 $X_0 = 1$ が自明でない解として生き残る**（ディリクレの場合との最大の違い）。 $\lambda_0 = 0$ は固有値である。

(iii) $\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$, $\mu > 0$) のとき。

一般解とその導関数は

$$X = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x), \quad X' = -A\mu \sin(\mu x) + B\mu \cos(\mu x)$$

境界条件を課すと

$$X'(0) = B\mu = 0$$

$$X'(L) = -A\mu \sin(\mu L) = 0$$

 $B = 0$ 、そして自明でない解 ($A \neq 0$) のためには $\sin(\mu L) = 0$ 、すなわち

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

手順 3: 時間成分と重ね合わせ。 $T_n(t) = e^{-k\lambda_n t}$ ($\lambda_n = (n\pi/L)^2$ に対する時間成分)。 $n = 0$ のモードは $\lambda_0 = 0$ なので $T_0(t) = e^0 = 1$ 、つまり**減衰せずに残る**。重ね合わせて一般解は

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

手順 4: 初期条件。 $t = 0$ とおくと

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = u_0 + \cos \frac{\pi x}{L}$$

右辺はすでに $n = 0$ の定数モードと $n = 1$ の固有関数の和なので、係数比較により $c_0 = u_0$ 、 $c_1 = 1$ 、他の $c_n = 0$ 。よって

$$u(x, t) = u_0 + \cos \frac{\pi x}{L} \exp \left(-k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 t \right)$$

(検算: $u_t = -k(\pi/L)^2 \cos \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}$ 、 $u_{xx} = -(\pi/L)^2 \cos \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}$ より $u_t = k u_{xx}$ 。 $u_x(x, t) = -\frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}$ は $x = 0, L$ で $\sin 0 = \sin \pi = 0$ となり $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ を満たす。初期条件も $t = 0$ で一致。また $t \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow u_0$ となり、断熱系ではエネルギー（区間平均温度）が保存され定常状態が初期の平均値 u_0 に一致することとも整合する。）