

NO.

0065

ラプラス方程式の境界値問題（矩形領域、上辺条件が二次関数）

ラプラス方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ は、直交座標では $u = X(x)Y(y)$ の積の形を仮定すると常微分方程式に帰着でき、変数分離法で解ける。

手順 1: 変数分離と固有値問題。 $u = X(x)Y(y)$ とおいて代入し XY で割ると

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$$

$u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ より $X(0) = X(\pi) = 0$ 。この固有値問題の解は

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

手順 2: Y 方向。 $Y_n'' - n^2 Y_n = 0$ の一般解を $Y_n = A_n \sinh(ny) + B_n \cosh(ny)$ ととる。 $u(x, 0) = 0$ より $Y_n(0) = B_n = 0$ 。よって $Y_n = A_n \sinh(ny)$ であり、重ね合わせて

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(ny) \sin(nx)$$

手順 3: 残った境界条件をフーリエ正弦級数で処理。 $y = 1$ を代入すると

$$u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh n) \sin(nx) = x(\pi - x)$$

これは $x(\pi - x)$ を $[0, \pi]$ でフーリエ正弦級数に展開した形なので、係数公式より

$$A_n \sinh n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx$$

手順 4: 積分の計算（部分積分）。 まず

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

($\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$ を用いた)。次に部分積分を 2 回行って

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx &= \left[-\frac{x^2 \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \left(0 + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n - 2}{n^3} \end{aligned}$$

これらより

$$\int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx = \pi \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) - \left(-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n - 2}{n^3} \right) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^3}$$

n が偶数のときは $(-1)^n = 1$ なので $1 - (-1)^n = 0$ 、 $n = 2k + 1$ (奇数) のときは $(-1)^n = -1$ なので $1 - (-1)^n = 2$ となり、積分値は奇数 n に対してのみ $\frac{4}{n^3}$ が残る。したがって

$$A_n \sinh n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{n^3} = \frac{8}{\pi n^3} \quad (n: \text{奇数}), \quad A_n = 0 \quad (n: \text{偶数})$$

よって

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh((2k+1)y)}{(2k+1)^3 \sinh(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

検算。 各項 $\sin(nx) \sinh(ny)$ は $u_{xx} + u_{yy} = (-n^2 + n^2) \sin(nx) \sinh(ny) = 0$ を満たし調和である。 $y = 0$ で $\sinh 0 = 0$ より $u(x, 0) = 0$ 。 $x = 0, \pi$ で $\sin(nx) = 0$ より $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$ 。 $y = 1$ では $\sinh n / \sinh n = 1$ となり $u(x, 1) = \frac{8}{\pi} \sum \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$ は $x(\pi - x)$ の標準的なフーリエ正弦級数と一致し、境界条件をすべて満たす。