

NO.

0066

ラプラス方程式の境界値問題（矩形領域、上辺条件が単一のフーリエ正弦項）

ラプラス方程式 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ は、直交座標では $u = X(x)Y(y)$ の積の形を仮定すると常微分方程式に帰着でき、変数分離法で解ける。

前問（0065）と同じ設定（ $0 < x < \pi$ 、3 辺で斉次条件 $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0$ ）なので、変数分離から一般解の構成までは共通であり

$$X_n(x) = \sin(nx), \quad Y_n(y) = A_n \sinh(ny) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より、重ね合わせた一般解は

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(ny) \sin(nx)$$

である。 $y = 2$ を代入して境界条件と比べると

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh 2n) \sin(nx) = 5 \sin 3x$$

右辺はすでに固有関数 $\sin 3x$ ($n = 3$) の 1 項なので、フーリエ積分を計算するまでもなく係数比較（固有関数系 $\{\sin nx\}$ の直交性により係数は一意に定まる）で

$$A_3 \sinh 6 = 5, \quad A_n = 0 \quad (n \neq 3)$$

すなわち $A_3 = \frac{5}{\sinh 6}$ 。したがって

$$u(x, y) = \frac{5 \sinh(3y)}{\sinh 6} \sin(3x)$$

検算。 $u_x = \frac{15 \sinh(3y)}{\sinh 6} \cos(3x)$, $u_{xx} = -\frac{45 \sinh(3y)}{\sinh 6} \sin(3x)$ 。 $u_y = \frac{15 \cosh(3y)}{\sinh 6} \sin(3x)$, $u_{yy} = \frac{45 \sinh(3y)}{\sinh 6} \sin(3x)$ 。ゆえに $u_{xx} + u_{yy} = 0$ であり調和関数である。また $y = 0$ で $\sinh 0 = 0$ より $u = 0$ 、 $x = 0, \pi$ で $\sin(3x) = 0$ より $u = 0$ 、 $y = 2$ で $u = \frac{5 \sinh 6}{\sinh 6} \sin 3x = 5 \sin 3x$ となり、境界条件をすべて満たす。