

NO.

0067

ラプラス方程式の境界値問題（円板領域、極座標での有界解）

極座標形式のラプラス方程式は $u = R(r)\Theta(\theta)$ の積の形を仮定すると常微分方程式に帰着でき、変数分離法で解ける。

手順 1: 変数分離。 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ において代入し、全体に r^2 を掛けると

$$r^2 R'' \Theta + r R' \Theta + R \Theta'' = 0$$

両辺を $R\Theta$ で割って移項すると

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

左辺は r のみ、右辺は θ のみの関数だから両者は定数に等しい。これを ν とおくと

$$\Theta'' + \nu \Theta = 0, \quad r^2 R'' + r R' - \nu R = 0$$

手順 2: 周期条件で分離定数が決まる。 θ と $\theta + 2\pi$ は円板上の同じ点を表すから、 Θ には境界条件の代わりに周期条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ が課される。 $\nu < 0$ なら Θ は指数関数となり周期的になれない。 $\nu \geq 0$ で $\nu = \omega^2$ とおくと $\Theta = a \cos \omega \theta + b \sin \omega \theta$ であり、これが周期 2π をもつのは ω が整数のときに限る。よって

$$\nu = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

($n = 0$ のときは定数 $\Theta_0 = a_0$ 。)

手順 3: r 方向はオイラー方程式。 $\nu = n^2$ を代入した $r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$ は係数が r のべきになっているオイラー方程式なので、 $R = r^m$ を試すと

$$m(m-1) + m - n^2 = 0 \implies m^2 = n^2 \implies m = \pm n$$

$n \geq 1$ では 2 つの独立解 r^n, r^{-n} が得られ、 $R = Cr^n + Dr^{-n}$ 。 $n = 0$ のときは重根 $m = 0$ となり、2 つ目の独立解として $\ln r$ が現れて $R = C + D \ln r$ である。

手順 4: 有界性で解を絞る。 円板の内部（原点を含む）で解を求めるので、 $r \rightarrow 0$ で u が有界でなければならない。 $r^{-n} \rightarrow \infty, \ln r \rightarrow -\infty$ だからいずれも捨てて $D = 0$ 、すなわち $R_n(r) = r^n$ 。したがって重ね合わせにより、円板内で有界な一般解は

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

手順 5: 境界条件と係数比較。 $r = 3$ を代入すると

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = 4 + 6 \cos \theta - 3 \sin 2\theta$$

右辺はすでに三角多項式（定数 + $\cos \theta$ + $\sin 2\theta$ ）の形なので、フーリエ級数の一意性から同じ関数の係数どうしを比較して

$$\frac{a_0}{2} = 4, \quad 3a_1 = 6, \quad 3^2 b_2 = -3$$

(他の a_n, b_n はすべて 0) よって $a_0 = 8, a_1 = 2, b_2 = -\frac{1}{3}$ より

$$u(r, \theta) = 4 + 2r \cos \theta - \frac{1}{3}r^2 \sin 2\theta$$

検算。 $r \cos \theta, r^2 \sin 2\theta$ はいずれも調和関数 ($r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ 型) であり定数関数も調和だから、 u は円板内で調和である。 $r = 3$ を代入すると $u(3, \theta) = 4 + 6 \cos \theta - \frac{9}{3} \sin 2\theta = 4 + 6 \cos \theta - 3 \sin 2\theta$ となり境界条件と一致する。また $r \rightarrow 0$ で $u \rightarrow 4$ となり有界である。