

NO.

0068

波動方程式（両端固定）の初期値・境界値問題（初期変位が基本固有関数の場合）

長さ L の弦の両端を固定した場合の初期値・境界値問題は、変数分離法（フーリエ級数展開）により解く。

(1) 変数分離 $u(x, t) = X(x)T(t)$ とおいて方程式に代入すると

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \implies \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

（両辺は x と t の独立変数の関数なので定数 $-\lambda$ に等しい。定数を $-\lambda$ とおくのは、後述のように境界条件を満たす非自明解が $\lambda > 0$ のときにしか存在しないためである。）これより連立の常微分方程式

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$$

を得る。

(2) 境界条件から固有値・固有関数を決定 $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ かつ $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$ が任意の t で成り立つ（ $T \equiv 0$ である自明解を除く）ためには

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

が必要である。 $\lambda \leq 0$ では $X \equiv 0$ となる自明解しか得られない（ $\lambda < 0$ なら X は指数関数の和、 $\lambda = 0$ なら 1 次関数となり、いずれも両端で 0 になるのは $X \equiv 0$ のみ）。 $\lambda = k^2 > 0$ とおくと

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

$X(0) = 0$ より $A = 0$ 。 $X(L) = B \sin kL = 0$ で $B \neq 0$ より $\sin kL = 0$ 、すなわち

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

よって固有値は $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ 、固有関数は

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

(3) 時間成分と一般解 $T''(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0$ より、角振動数 $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ として $T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$ 。各モード $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ の重ね合わせにより、一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

で与えられる。

(4) 初期条件の適用 $u_t(x, 0) = 0$ より、すべての n について $B_n = 0$ 。また

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{\pi x}{L}$$

は右辺がすでに $n = 1$ の固有関数そのものであるから、 $\{\sin(n\pi x/L)\}$ の直交性より $A_1 = 1$ 、 $A_n = 0$ ($n \geq 2$) と一意に定まる（フーリエ係数の積分計算をするまでもない）。よって

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi c t}{L} \sin \frac{\pi x}{L}$$

(検算: $u_{tt} = -\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 \cos \frac{\pi ct}{L} \sin \frac{\pi x}{L}$, $c^2 u_{xx} = c^2 \left(-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) \cos \frac{\pi ct}{L} \sin \frac{\pi x}{L}$ で両者は一致し波動方程式を満たす。 $u(0, t) = u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin(\pi x/L)$, $u_t(x, 0) = -\frac{\pi c}{L} \sin(0) \sin(\pi x/L) = 0$ もすべて満たす。)