

NO.

0069

波動方程式（両端固定）における三角波状初期変位のフーリエ級数解

長さ L の弦の両端を固定した場合の初期値・境界値問題は、変数分離法（フーリエ級数展開）により解く。
変数分離 $u = X(x)T(t)$ と境界条件から固有値 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ 、固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ が定まり、一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

となる（導出は本テーマ他問と同様）。初期条件に代入すると

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 0$$

であり、直交性 $\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$ から係数が定まる。

初期速度の項 $u_t(x, 0) = 0$ より、すべての n について $B_n = 0$ 。

初期変位の項（ A_n の計算）

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^L \frac{2h}{L} (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

第2項は $x' = L - x$ と置換すると

$$\int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x' \sin \frac{n\pi(L-x')}{L} dx' = \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x' \left(\sin n\pi \cos \frac{n\pi x'}{L} - \cos n\pi \sin \frac{n\pi x'}{L} \right) dx'$$

となる。 $\sin n\pi = 0$ 、 $\cos n\pi = (-1)^n$ であるから

$$= -(-1)^n \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x' \sin \frac{n\pi x'}{L} dx'$$

よって

$$A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{2h}{L} (1 - (-1)^n) \int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

偶数 n では $1 - (-1)^n = 0$ より $A_n = 0$ 。奇数 n では $1 - (-1)^n = 2$ であり、部分積分

$$\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \left[-\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

奇数 n では $\cos(n\pi/2) = 0$ なので

$$\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

これらをまとめると

$$A_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{2h}{L} \cdot 2 \cdot \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n : \text{奇数}), \quad A_n = 0 \quad (n : \text{偶数})$$

$\sin(n\pi/2)$ は $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ に対して $1, -1, 1, -1, \dots$ となるので、 $n = 2m - 1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) と書けば $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{m-1}$ 。よって

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi ct}{L} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$$

(検算: $t = 0$ とすると $u(x, 0) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{L}$ となり、これは三角波 $f(x)$ の標準的なフーリエ正弦級数展開に一致する。特に $x = L/2$ で $\sin \frac{(2m-1)\pi}{2} = (-1)^{m-1}$ なので $u(L/2, 0) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{8h}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = h$ となり $f(L/2) = h$ と一致する。また各項は波動方程式・境界条件・ $u_t(x, 0) = 0$ を満たす。)