

NO.

0070

波動方程式（両端固定）における単一モードの初期速度に対する解

長さ L の弦の両端を固定した場合の初期値・境界値問題は、変数分離法（フーリエ級数展開）により解く。
変数分離 $u = X(x)T(t)$ と境界条件から固有値 $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ 、固有関数 $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ が定まり、一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

となる（導出は本テーマ他問と同様）。初期条件に代入すると

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = v_0 \sin \frac{3\pi x}{L}$$

初期変位の項 $u(x, 0) = 0$ より、すべての n について $A_n = 0$ 。

初期速度の項 (B_n の計算)

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0 \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

右辺の被積分関数はすでに固有関数 $\sin(3\pi x/L)$ そのものなので、 $\{\sin(n\pi x/L)\}$ の直交性より $n = 3$ のときのみ

$$\int_0^L v_0 \sin^2 \frac{3\pi x}{L} dx = v_0 \cdot \frac{L}{2}$$

であり、それ以外の n では積分は 0 となる。よって

$$B_3 = \frac{2}{3\pi c} \cdot v_0 \cdot \frac{L}{2} = \frac{v_0 L}{3\pi c}, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3)$$

したがって

$$u(x, t) = \frac{v_0 L}{3\pi c} \sin \frac{3\pi ct}{L} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

（検算: $u_t(x, t) = \frac{v_0 L}{3\pi c} \cdot \frac{3\pi c}{L} \cos \frac{3\pi ct}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} = v_0 \cos \frac{3\pi ct}{L} \sin \frac{3\pi x}{L}$ で、 $t = 0$ とすると $u_t(x, 0) = v_0 \sin \frac{3\pi x}{L}$ となり初期速度条件に一致する。また $u(x, 0) = 0$ 、 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ を満たし、 $u_{tt} = -\left(\frac{3\pi c}{L}\right)^2 u$ 、 $c^2 u_{xx} = c^2 \left(-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2\right) u = -\left(\frac{3\pi c}{L}\right)^2 u$ で波動方程式も満たす。）