

NO.

0071

2 階線形偏微分方程式の型判定と領域による型の変化 ($y u_{xx} + u_{yy} = 0$)

方針: 2 階線形偏微分方程式

$$A(x, y) u_{xx} + 2B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + (\text{低階の項}) = 0$$

の型は、判別式 $D = B^2 - AC$ の符号によって次のように分類される。

$$D = B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{楕円型 (elliptic)} \\ = 0 & \text{放物型 (parabolic)} \\ > 0 & \text{双曲型 (hyperbolic)} \end{cases}$$

係数が変数の場合、 D の符号が点ごとに変わりうるため、領域を分けて型を判定する必要がある。

$A = y, B = 0, C = 1$ であるから

$$D = B^2 - AC = 0 - y \cdot 1 = -y$$

よって

$$D = -y \begin{cases} < 0 & (y > 0) \Rightarrow \text{楕円型} \\ = 0 & (y = 0) \Rightarrow \text{放物型 (退化)} \\ > 0 & (y < 0) \Rightarrow \text{双曲型} \end{cases}$$

(これは Tricomi 方程式と呼ばれる有名な混合型方程式であり、 $y = 0$ が型が変わる境界である。)

$$y > 0 : \text{楕円型}, \quad y = 0 : \text{放物型}, \quad y < 0 : \text{双曲型}$$

(検算: $y = 1 > 0$ では $D = -1 < 0$ で楕円型、 $y = -1 < 0$ では $D = 1 > 0$ で双曲型となり、符号の対応が一致する。)