

NO.

0072

双曲型 2 階線形偏微分方程式の標準形と一般解 ($u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$)

方針: 判別式 $D = B^2 - AC$ で型を判定した上で、特性方程式

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

を解いて特性曲線 $\varphi(x, y) = \text{const.}$ を求め、新変数 ξ, η にとると主要部の係数が消えて標準形が得られる。双曲型 ($D > 0$) では実数の特性曲線が 2 本得られ、 ξ, η をそれぞれの特性曲線にとると標準形 $u_{\xi\eta} = 0$ が得られる。

$A = 1, B = -2, C = 3$ であるから

$$D = B^2 - AC = 4 - 3 = 1 > 0 \quad (\text{双曲型})$$

特性方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{D}}{A} = -2 \pm 1$$

すなわち $\frac{dy}{dx} = -1$ または $\frac{dy}{dx} = -3$ 。それぞれ積分して

$$y + x = c_1, \quad y + 3x = c_2$$

そこで

$$\xi = y + x, \quad \eta = y + 3x$$

とおく。逆に $x = \frac{\eta - \xi}{2}, y = \frac{3\xi - \eta}{2}$ 。連鎖律より

$$u_x = u_\xi + 3u_\eta, \quad u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

これを元の方程式に代入すると

$$(u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}) - 4(u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}) + 3(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

係数を整理すると、 $u_{\xi\xi}$ の係数は $1 - 4 + 3 = 0$ 、 $u_{\eta\eta}$ の係数は $9 - 12 + 3 = 0$ 、 $u_{\xi\eta}$ の係数は $6 - 16 + 6 = -4$ となるので

$$-4u_{\xi\eta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{\xi\eta} = 0$$

これが標準形である。 $u_{\xi\eta} = 0$ を η について積分すると $u_\xi = f'(\xi)$ (η に依らない関数)、さらに ξ について積分して

$$u = f(\xi) + g(\eta)$$

(f, g は任意の C^2 関数)。 ξ, η をもとに戻すと

$$u(x, y) = f(y + x) + g(y + 3x)$$

(検算: $u = f(y + x)$ とすると $u_{xx} = f''$, $u_{xy} = f''$, $u_{yy} = f''$ より $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = (1 - 4 + 3)f'' = 0$ 。
 $u = g(y + 3x)$ とすると $u_{xx} = 9g''$, $u_{xy} = 3g''$, $u_{yy} = g''$ より $(9 - 12 + 3)g'' = 0$ 。したがって重ね合わせにより一般解は方程式を満たす。)