

NO.

0073

放物型 2 階線形偏微分方程式の標準形と初期値問題 ($u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$)

方針: 判別式 $D = B^2 - AC$ が 0 となる放物型の場合、特性方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$$

は重根であり特性曲線は 1 本しか得られない。その特性曲線を ξ にとり、 ξ, η が独立になるように η を任意に選ぶ（例えば $\eta = y$ ）と、標準形 $u_{\eta\eta} = 0$ が得られる。これを積分して一般解 $u = f(\xi) + \eta g(\xi)$ を求めた後、初期条件から f, g を定める。

$A = 1, B = -1, C = 1$ であるから

$$D = B^2 - AC = 1 - 1 = 0 \quad (\text{放物型})$$

特性方程式は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} = -1$$

(重根なので特性曲線は 1 本)。積分して $y + x = c$ 。そこで

$$\xi = y + x, \quad \eta = y$$

(η は ξ, η が独立になるように任意に選んだもの) とおく。逆に $x = \xi - \eta, y = \eta$ 。連鎖律より

$$u_x = u_\xi, \quad u_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}, \quad u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

元の方程式に代入すると

$$u_{\xi\xi} - 2(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = (1 - 2 + 1)u_{\xi\xi} + (-2 + 2)u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\eta\eta}$$

よって標準形は

$$u_{\eta\eta} = 0$$

これを η について 2 回積分すると

$$u = f(\xi) + \eta g(\xi)$$

(f, g は任意関数)。 $\xi = y + x, \eta = y$ に戻すと一般解は

$$u(x, y) = f(x + y) + y g(x + y)$$

次に初期条件を課す。 $u_y = f'(x + y) + g(x + y) + y g'(x + y)$ であるから

$$u(x, 0) = f(x) = x^2$$

$$u_y(x, 0) = f'(x) + g(x) = 0 \implies g(x) = -f'(x) = -2x$$

これらを一般解に代入して、 $f(x+y) = (x+y)^2$, $g(x+y) = -2(x+y)$ より

$$u(x, y) = (x+y)^2 - 2y(x+y)$$

展開すると $(x+y)^2 - 2y(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - 2y^2 = x^2 - y^2$ なので

$$\boxed{u(x, y) = x^2 - y^2}$$

(検算: $u = x^2 - y^2$ より $u_{xx} = 2$, $u_{xy} = 0$, $u_{yy} = -2$ で $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 2 - 0 - 2 = 0$ を満たす。また $u(x, 0) = x^2$ 、 $u_y = -2y$ より $u_y(x, 0) = 0$ もともに満たす。)