

NO.

0074

2 次対称行列の固有値・固有ベクトルと直交対角化

固有方程式は

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

より $\lambda = 4, 2$ 。

$\lambda = 4$: $A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より $x_1 = x_2$ 、固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (正規化済み)。

$\lambda = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より $x_1 = -x_2$ 、固有ベクトルは $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。

$\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$ (対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する) なので、そのまま直交行列

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が取れ、

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

検算: $AP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3+1 & 3-1 \\ 1+3 & 1-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ 、一方 $PD = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 & -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ で一致

し、また $P^T P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = I$ も確認できる。