

NO.

0075

3 次対称行列の固有値・固有ベクトルと直交対角化

$A = I + J$ (J はすべての成分が 1 の 3×3 行列) と書ける。 J の固有値は、階数 1・trace 3 より 3, 0, 0 ($\lambda = 3$ の固有ベクトルは $(1, 1, 1)^T$ 、 $\lambda = 0$ の固有空間は $x + y + z = 0$ を満たす平面) であるから、 $A = I + J$ の固有値は

$$\lambda = 1 + 3 = 4 \text{ (単根)}, \quad \lambda = 1 + 0 = 1 \text{ (重根)}$$

実際に検算すると、 $\det(A - \lambda I)$ を直接展開しても

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

となり一致する。

$\lambda = 4$: 固有空間は $(1, 1, 1)^T$ 方向。正規化して $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ 。

$\lambda = 1$: 固有空間は平面 $x + y + z = 0$ 。この中で正規直交基底を (グラム・シュミットで) 選ぶと、例えば

$$\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$$

($\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1 - 1 + 0) = 0$ 、 $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ とも $(1, 1, 1)$ に直交することも確認できる)。

したがって直交行列

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

により

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

検算: $A\mathbf{p}_1 = (I + J)\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 + \sqrt{3}(1, 1, 1)^T = \mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_1 = 4\mathbf{p}_1$ 。また $J\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ (各成分の和が 0 のため) より $A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{p}_2$ 、同様に $A\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3$ 。いずれも一致する。