

NO.

0076

対角化による行列の n 乗の計算

固有方程式は

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = 3, -1$$

$$\lambda = 3: A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ より固有ベクトル } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = -1: A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ より固有ベクトル } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(P^{-1} は $\det P = -2$ と余因子行列から $\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として得られる)。 $A^n = PD^nP^{-1}$ を計算すると

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^n & -(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

検算: $n = 1$ とすると $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3-1 & 3+1 \\ 3+1 & 3-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ と一致する。また $n = 2$ とすると $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9+1 & 9-1 \\ 9-1 & 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ であり、直接 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ と計算しても一致する。