

NO.

0077

3次正方行列の行列式と逆行列（余因子展開）

第1行に関して余因子展開する。

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-6) + 0 = 1 + 12 = 13$$

よって

$$\det A = 13$$

次に各余因子を計算する。

$$A_{11} = 1, A_{12} = 6, A_{13} = -2, A_{21} = -2, A_{22} = 1, A_{23} = 4, A_{31} = 6, A_{32} = -3, A_{33} = 1$$

(例: $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 4) = 4$.) 余因子行列を転置して随伴行列を作ると

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

検算として AA^{-1} を実際に計算する。 A の第1行 $(1, 2, 0)$ と A^{-1} の第1列 $(1, 6, -2)/13$ の内積は $(1 + 12 + 0)/13 = 1$ 、第2列 $(-2, 1, 4)/13$ との内積は $(-2 + 2 + 0)/13 = 0$ 、第3列 $(6, -3, 1)/13$ との内積は $(6 - 6 + 0)/13 = 0$ となる。同様に第2行・第3行についても計算すると

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

が確かめられる。