

NO.

0078

行列方程式 $AX=B$ の解（逆行列を用いた解法）

A が正則ならば、 $AX=B$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて $X=A^{-1}B$ と一意に解ける。まず A が正則であることを確かめ、 A^{-1} を求める。

第 1 行に関して余因子展開すると

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \neq 0$$

であるから A は正則である。余因子を計算すると

$$A_{11} = 1, A_{12} = 1, A_{13} = -1, A_{21} = -1, A_{22} = 1, A_{23} = 1, A_{31} = 1, A_{32} = -1, A_{33} = 1$$

より随伴行列は

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A は正則だから $X=A^{-1}B$ と一意に定まる。 A^{-1} の各行と B の各列の内積を計算すると

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-3+1 & 3-5+6 \\ 4+3-1 & 3+5-6 \\ -4+3+1 & -3+5+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

したがって

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

検算として AX を直接計算する。第 1 行 $(1, 1, 0)$ と X の各列の内積は $(1+3, 2+1) = (4, 3)$ 、第 2 行 $(0, 1, 1)$ とは $(3+0, 1+4) = (3, 5)$ 、第 3 行 $(1, 0, 1)$ とは $(1+0, 2+4) = (1, 6)$ となる。すなわち

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = B$$

であり、 B に一致することが確かめられる。