

NO.

0079

## パラメータを含む 3 次正方行列が正則でない条件

$A(t)$  が正則でないための必要十分条件は  $\det A(t) = 0$  であるから、まず  $\det A(t)$  を計算する。第 2 行・第 3 行からそれぞれ第 1 行を引いても行列式の値は変わらないから、

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{vmatrix}$$

第 2 行・第 3 行から共通因子  $(t-1)$  をくくり出すと

$$\det A(t) = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

右辺の  $3 \times 3$  行列式を第 1 行で余因子展開すると

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 1((-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + 1((-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = t + 1 + 1 = t + 2$$

したがって

$$\det A(t) = (t-1)^2(t+2)$$

(検算:  $t = 0$  を代入すると  $\det A(0) = (-1)^2 \cdot 2 = 2$ 。一方、直接展開すると  $A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  で、

$\det = 0(0-1) - 1(0-1) + 1(1-0) = 0 + 1 + 1 = 2$  となり一致する。)

$A(t)$  が正則でないのは  $\det A(t) = 0$  のときであり、 $(t-1)^2(t+2) = 0$  を解くと

$$t = 1 \text{ (重解)}, \quad t = -2$$

検算として、 $t = 1$  のとき  $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  は全行が等しく階数 1 で正則でないことが確かめられる。

$t = -2$  のとき  $A(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  は各行の和が 0 となるため  $(1, 1, 1)^T$  が核に属し、正則でないことが

確かめられる。