

NO.

0080

ケーリー・ハミルトンの定理を用いた行列多項式 $A^5 - A^2 - 16A$ の計算

一般に、多項式 $p(\lambda)$ を固有多項式 $\varphi(\lambda)$ で割った商を $q(\lambda)$ 、余りを $r(\lambda)$ ($\deg r < \deg \varphi$) とすると

$$p(\lambda) = q(\lambda)\varphi(\lambda) + r(\lambda)$$

であり、ケーリー・ハミルトンの定理 $\varphi(A) = O$ より

$$p(A) = q(A)\varphi(A) + r(A) = r(A)$$

となる。すなわち $p(A)$ は余り $r(\lambda)$ に A を代入するだけで求まり、次数の低い行列多項式の計算に帰着できる。

A の固有多項式は

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

($\operatorname{tr} A = 1 + 1 = 2$, $\det A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$) であるから、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2A - 3I = O \iff A^2 = 2A + 3I$$

求めたい多項式 $p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^2 - 16\lambda$ を $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ で割ると、

$$\lambda^5 - \lambda^2 - 16\lambda = (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 19)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) + (43\lambda + 57)$$

(実際、 $(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 19)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$ を展開すると $\lambda^5 - \lambda^2 - 59\lambda - 57$ となり、これに余り $43\lambda + 57$ を加えると $\lambda^5 - \lambda^2 - 16\lambda$ に一致し、割り算が正しいことが確かめられる)。したがって $\varphi(A) = O$ より

$$A^5 - A^2 - 16A = 43A + 57I$$

ここで

$$43A = \begin{pmatrix} 43 & 86 \\ 86 & 43 \end{pmatrix}, \quad 57I = \begin{pmatrix} 57 & 0 \\ 0 & 57 \end{pmatrix}$$

であるから

$$A^5 - A^2 - 16A = \begin{pmatrix} 100 & 86 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}$$

(検算: A の固有値は $\varphi(\lambda) = 0$ より $\lambda = 3, -1$ 。固有値 3 を代入すると $3^5 - 3^2 - 16 \cdot 3 = 243 - 9 - 48 = 186 = 43 \cdot 3 + 57$ 、固有値 -1 を代入すると $(-1)^5 - (-1)^2 - 16(-1) = -1 - 1 + 16 = 14 = 43 \cdot (-1) + 57$ となり、いずれも $r(\lambda) = 43\lambda + 57$ と一致する。さらに直接 $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$,

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 13 + 4 \cdot 14 & 5 \cdot 14 + 4 \cdot 13 \\ 4 \cdot 13 + 5 \cdot 14 & 4 \cdot 14 + 5 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{pmatrix} \text{ を計算すると、} A^5 - A^2 - 16A = \begin{pmatrix} 121 & 122 \\ 122 & 121 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 86 \\ 86 & 100 \end{pmatrix} \text{ となり、一致する。)$$