

NO.

0081

固有多項式の剰余を利用した行列のべき乗 B^6 の計算

一般に、多項式 $p(\lambda)$ を固有多項式 $\varphi(\lambda)$ で割った商を $q(\lambda)$ 、余りを $r(\lambda)$ ($\deg r < \deg \varphi$) とすると

$$p(\lambda) = q(\lambda)\varphi(\lambda) + r(\lambda)$$

であり、ケーリー・ハミルトンの定理 $\varphi(B) = O$ より

$$p(B) = q(B)\varphi(B) + r(B) = r(B)$$

となる。すなわち $p(B)$ は余り $r(\lambda)$ に B を代入するだけで求まる。

B は上三角行列なので固有値は対角成分 2, 3 であり、固有多項式は

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

ケーリー・ハミルトンの定理より $B^2 = 5B - 6I$ が成り立つ。

λ^6 を $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ で割ると

$$\lambda^6 = (\lambda^4 + 5\lambda^3 + 19\lambda^2 + 65\lambda + 211)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + (665\lambda - 1266)$$

であるから

$$B^6 = 665B - 1266I$$

ここで

$$665B = \begin{pmatrix} 1330 & 665 \\ 0 & 1995 \end{pmatrix}, \quad 1266I = \begin{pmatrix} 1266 & 0 \\ 0 & 1266 \end{pmatrix}$$

より

$$B^6 = \begin{pmatrix} 64 & 665 \\ 0 & 729 \end{pmatrix}$$

(検算: 固有値 $\lambda = 2$ を余りの式に代入すると $2^6 = 64$ に対し $665 \cdot 2 - 1266 = 1330 - 1266 = 64$ で一致。固有値 $\lambda = 3$ では $3^6 = 729$ に対し $665 \cdot 3 - 1266 = 1995 - 1266 = 729$ で一致。また B は上三角行列なので B^6 の対角成分は各対角成分の 6 乗 $2^6 = 64$, $3^6 = 729$ に一致しており、これも検算と整合する。)