

NO.

0082

ブロック三角行列に対するケーリー・ハミルトンの定理の応用 (C^4 の計算)

一般に、多項式 $p(\lambda)$ を固有多項式 $\varphi(\lambda)$ で割った商を $q(\lambda)$ 、余りを $r(\lambda)$ ($\deg r < \deg \varphi$) とすると

$$p(\lambda) = q(\lambda)\varphi(\lambda) + r(\lambda)$$

であり、ケーリー・ハミルトンの定理 $\varphi(C) = O$ より

$$p(C) = q(C)\varphi(C) + r(C) = r(C)$$

となる。すなわち $p(C)$ は余り $r(\lambda)$ に C を代入するだけで求まる。 3×3 行列であれば余り $r(\lambda)$ は高々 2 次式となるため、 C^2 を直接計算しておけばよい。

C はブロック三角行列であり、固有多項式は 1 行目・列のブロック (2) と右下ブロック $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ の固有多項式の積として求まる。右下ブロックの固有多項式は

$$\lambda^2 - (1+4)\lambda + (1 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

であるから、 C 全体の固有多項式は

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 2)(\lambda - 3) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

(固有値は $\lambda = 2$ (重複度 2), $\lambda = 3$)。ケーリー・ハミルトンの定理より

$$C^3 - 7C^2 + 16C - 12I = O$$

λ^4 を $\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$ で割ると

$$\lambda^4 = (\lambda + 7)(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) + (33\lambda^2 - 100\lambda + 84)$$

であるから

$$C^4 = 33C^2 - 100C + 84I$$

C^2 を直接計算すると

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{pmatrix}$$

(1 行目は $(2 \cdot 2, 0, 0) = (4, 0, 0)$ 、2 行目は $(0, 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2), 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = (0, -1, 5)$ 、3 行目は $(0, -2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2), -2 \cdot 1 + 4 \cdot 4) = (0, -10, 14)$ より)。したがって

$$33C^2 = \begin{pmatrix} 132 & 0 & 0 \\ 0 & -33 & 165 \\ 0 & -330 & 462 \end{pmatrix}, \quad 100C = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 100 \\ 0 & -200 & 400 \end{pmatrix}, \quad 84I = \begin{pmatrix} 84 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{pmatrix}$$

より

$$C^4 = 33C^2 - 100C + 84I = \begin{pmatrix} 132 - 200 + 84 & 0 & 0 \\ 0 & -33 - 100 + 84 & 165 - 100 + 0 \\ 0 & -330 + 200 + 0 & 462 - 400 + 84 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -49 & 65 \\ 0 & -130 & 146 \end{pmatrix}$$

(検算: 固有値 $\lambda = 2$ を余りの式に代入すると $2^4 = 16$ に対し $33 \cdot 2^2 - 100 \cdot 2 + 84 = 132 - 200 + 84 = 16$ で一致。固有値 $\lambda = 3$ では $3^4 = 81$ に対し $33 \cdot 9 - 100 \cdot 3 + 84 = 297 - 300 + 84 = 81$ で一致。さらに $(1, 1)$ 成分は C が上三角ブロックのため $2^4 = 16$ に一致しており整合する。)