

NO.

0088

x ln x の定積分（部分積分）

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ であるから、部分積分により

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$$

第1項は $\frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{e^2}{2}$ 、第2項は $\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$ であるから

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

すなわち

$$\boxed{\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2 + 1}{4}}$$

(検算: 原始関数は $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ であり、微分すると $x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x$ となり被積分関数に一致する。 $x = e$ で $\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{4}$ 、 $x = 1$ で $0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ 。差は $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$ 。)