

NO.

0089

 $e^x \cos x$ の定積分（循環型部分積分）

$e^x \sin x$ や $e^x \cos x$ のように、部分積分を繰り返しても被積分関数の形が変わらない（元に戻ってくる）場合は循環型と呼ばれる。この場合は部分積分を 2 回行くと、両辺に同じ形の積分が現れるので、方程式とみなしてそれについて解けばよい。

$I = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ とおく。 $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$ として部分積分すると

$$I = \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$$

$((\cos x)' = -\sin x$ より $-\int e^x(-\sin x) \, dx = +\int e^x \sin x \, dx$ となることに注意)。さらに $J = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$ に対して同様に $f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^x$ として部分積分すると

$$J = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - I$$

$\sin 0 = \sin \pi = 0$ であるから $\left[e^x \sin x \right]_0^\pi = 0$ 、よって $J = -I$ 。これを I の式に代入すると

$$I = \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + J = (e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0) + (-I) = (-e^\pi - 1) - I$$

すなわち $2I = -e^\pi - 1$ より

$$\int_0^\pi e^x \cos x \, dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

(検算: 原始関数は $\frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$ であり、微分すると $\frac{e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)}{2} = \frac{2e^x \cos x}{2} = e^x \cos x$ となり被積分関数に一致する。 $x = \pi$ で $\frac{e^\pi(0-1)}{2} = -\frac{e^\pi}{2}$ 、 $x = 0$ で $\frac{1(0+1)}{2} = \frac{1}{2}$ 。差は $-\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{e^\pi + 1}{2}$ 。)