

NO.

0090

 $x\sqrt{1-x^2}$ の定積分（置換積分）

$u = 1 - x^2$ とおくと $du = -2x dx$ 、すなわち $x dx = -\frac{1}{2} du$ 。また積分区間は $x : 0 \rightarrow 1$ に対して $u : 1 \rightarrow 0$ となるから

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \int_1^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

すなわち

$$\boxed{\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3}}$$

（検算：原始関数は $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ であり、微分すると $-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2} \cdot (-2x) = x\sqrt{1-x^2}$ となり被積分関数に一致する。 $x=1$ で 0 、 $x=0$ で $-\frac{1}{3}$ 。差は $0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ 。）