

NO.

0094

 $\log x/x^\alpha$ の不定積分の場合分け

(i) $\alpha = 1$ のとき. $\int \frac{\log x}{x} dx$ は $t = \log x$ ($dt = \frac{1}{x} dx$) と置換すると

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C$$

よって

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C$$

(検算: $\frac{d}{dx} \frac{(\log x)^2}{2} = \log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log x}{x}$ で一致。)

(ii) $\alpha \neq 1$ のとき. 部分積分で $u = \log x$, $v' = x^{-\alpha}$ ($v = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$) とすると

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^\alpha} dx &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x - \int \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x - \frac{1}{1-\alpha} \int x^{-\alpha} dx \\ &= \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x - \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} + C \end{aligned}$$

よって

$$\int \frac{\log x}{x^\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x - \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} + C \quad (\alpha \neq 1)$$

(検算: $\frac{d}{dx} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x \right] = x^{-\alpha} \log x + \frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha}$, $\frac{d}{dx} \left[-\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} \right] = -\frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha}$ であり、両者を加えると $x^{-\alpha} \log x = \frac{\log x}{x^\alpha}$ となり一致する。)