

NO.

0104

 $\arctan(2x/(1-x^2))$ の導関数

合成関数の微分公式 $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$ (連鎖律) を用いる。

$u = \frac{2x}{1-x^2}$ とおく。商の微分法より

$$u' = \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

また

$$1+u^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}}{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

($x^2 \neq 1$ 、すなわち $x \neq \pm 1$ で定義される。) したがって

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}}$$

(検算: これは $\arctan(2x/(1-x^2)) = 2\arctan x$ ($|x| < 1$ 、正接の2倍角公式 $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ に $\theta = \arctan x$ を代入した恒等式) と一致することからも確認できる。実際 $y = 2\arctan x$ を直接微分すると $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$ となり、上の結果と一致する。)