

NO.

0106

合成関数の連鎖律による dz/dt の計算

$z = f(x, y)$ 、 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ のとき、連鎖律（合成関数の微分公式）

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

が成り立つ。これを用いる。

$z_x = 2xy$ 、 $z_y = x^2 - 3y^2$ 、 $\frac{dx}{dt} = e^t$ 、 $\frac{dy}{dt} = -\sin t$ であるから、連鎖律より

$$\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt} = (2xy)(e^t) + (x^2 - 3y^2)(-\sin t)$$

ここで $x = e^t$ 、 $y = \cos t$ を代入すると

$$\frac{dz}{dt} = 2e^t \cos t \cdot e^t - (e^{2t} - 3 \cos^2 t) \sin t$$

すなわち

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t + 3 \sin t \cos^2 t$$

（検算: $t = 0$ のとき $x = 1, y = 1, z_x = 2, z_y = -2, dx/dt = 1, dy/dt = 0$ なので $dz/dt = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 2$ 。上に式に $t = 0$ を代入すると $2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 2$ で一致する。）