

NO.

0107

極座標変換による $z = x^2 - y^2$ の偏微分計算

$z = f(x, y)$ 、 $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ。ここでは $(u, v) = (r, \theta)$ として、極座標変換 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ に適用する。

$z_x = 2x$ 、 $z_y = -2y$ 、 $x_r = \cos \theta$ 、 $y_r = \sin \theta$ 、 $x_\theta = -r \sin \theta$ 、 $y_\theta = r \cos \theta$ であるから

$$\frac{\partial z}{\partial r} = z_x x_r + z_y y_r = 2x \cos \theta - 2y \sin \theta = 2r \cos^2 \theta - 2r \sin^2 \theta = 2r \cos 2\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_x x_\theta + z_y y_\theta = -2x r \sin \theta - 2y r \cos \theta = -2r^2 \sin \theta \cos \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta = -2r^2 \sin 2\theta$$

したがって

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r \cos 2\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -2r^2 \sin 2\theta$$

(検算: $z = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos 2\theta$ と直接 r, θ の関数として書き直すと、 $\partial z / \partial r = 2r \cos 2\theta$ 、 $\partial z / \partial \theta = -2r^2 \sin 2\theta$ となり一致する。)