

NO.

0108

陰関数定理を用いた dy/dx の計算

陰関数 $F(x, y) = 0$ が定める $y = y(x)$ については、両辺を x で微分し連鎖律を用いると

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (F_y \neq 0)$$

が成り立つ（陰関数定理）。これを用いる。

$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とおくと

$$F_x = 3x^2 - 3y, \quad F_y = 3y^2 - 3x$$

であるから、陰関数定理より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ はこの曲線上にある（実際 $\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0$ ）。この点で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{4}}{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -1$$

したがって

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(3/2, 3/2)} = -1}$$

（検算: $F_y = 3\left(\frac{9}{4}\right) - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4} - \frac{18}{4} = \frac{9}{4} \neq 0$ より陰関数定理が適用できる。）