

NO.

0109

u, v 変換による偏微分の連鎖律表示と xy の具体計算

$z = f(x, y)$ 、 $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ。これを用いる。

$x_u = 2u$ 、 $y_u = 2v$ 、 $x_v = -2v$ 、 $y_v = 2u$ であるから、連鎖律より

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z_x \cdot 2u + z_y \cdot 2v = 2u z_x + 2v z_y$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = z_x \cdot (-2v) + z_y \cdot 2u = -2v z_x + 2u z_y$$

次に $f(x, y) = xy$ のとき $z_x = y$ 、 $z_y = x$ であるから、 $x = u^2 - v^2$ 、 $y = 2uv$ を用いて

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \cdot y + 2v \cdot x = 2u(2uv) + 2v(u^2 - v^2) = 4u^2v + 2u^2v - 2v^3 = 6u^2v - 2v^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -2v \cdot y + 2u \cdot x = -2v(2uv) + 2u(u^2 - v^2) = -4uv^2 + 2u^3 - 2uv^2 = 2u^3 - 6uv^2$$

したがって

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u z_x + 2v z_y, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -2v z_x + 2u z_y$$

$f = xy$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 6u^2v - 2v^3, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2u^3 - 6uv^2$$

(検算: $z = xy = (u^2 - v^2)(2uv) = 2u^3v - 2uv^3$ を直接 u, v で偏微分すると $\partial z / \partial u = 6u^2v - 2v^3$ 、 $\partial z / \partial v = 2u^3 - 6uv^2$ となり一致する。)