

NO.

0110

極座標変換によるラプラシアン of 極座標表示の導出

$z = f(x, y)$ 、 $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ。極座標変換 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ の場合は

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

であるから、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r z_x \sin \theta + r z_y \cos \theta$$

となる。逆に r, θ を x, y の関数とみると、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\theta = \arctan(y/x)$ より

$$r_x = \cos \theta, \quad r_y = \sin \theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$$

であり、これを連鎖律に代入すると、偏微分の作用素として

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

という表示（作用素の合成）が得られる。この作用素を2回適用する。

まず

$$z_x = \cos \theta z_r - \frac{\sin \theta}{r} z_\theta$$

に再び $\partial/\partial x$ を作用させる。 θ に依存する $\cos \theta, \sin \theta$ と r に依存する $1/r$ に注意して積の微分を行うと

$$\partial_r \left(\cos \theta z_r - \frac{\sin \theta}{r} z_\theta \right) = \cos \theta z_{rr} + \frac{\sin \theta}{r^2} z_\theta - \frac{\sin \theta}{r} z_{r\theta}$$

$$\partial_\theta \left(\cos \theta z_r - \frac{\sin \theta}{r} z_\theta \right) = -\sin \theta z_r + \cos \theta z_{r\theta} - \frac{\cos \theta}{r} z_\theta - \frac{\sin \theta}{r} z_{\theta\theta}$$

であるから

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \cos \theta \left[\cos \theta z_{rr} + \frac{\sin \theta}{r^2} z_\theta - \frac{\sin \theta}{r} z_{r\theta} \right] - \frac{\sin \theta}{r} \left[-\sin \theta z_r + \cos \theta z_{r\theta} - \frac{\cos \theta}{r} z_\theta - \frac{\sin \theta}{r} z_{\theta\theta} \right] \\ &= \cos^2 \theta z_{rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} z_r + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} z_{\theta\theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} z_{r\theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} z_\theta \end{aligned}$$

同様に $z_y = \sin \theta z_r + \frac{\cos \theta}{r} z_\theta$ にもう一度 $\partial/\partial y$ を作用させると

$$z_{yy} = \sin^2 \theta z_{rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} z_r + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} z_{r\theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} z_\theta$$

両者を加えると、 $z_{r\theta}$ の項（符号が逆で係数が同じ）と z_θ の項（同様）はすべて相殺し、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を用いて

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$$

すなわち

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

が示された。(検算: $z = x^2 + y^2 = r^2$ とおくと、左辺は $z_{xx} + z_{yy} = 2 + 2 = 4$ 。右辺は $z_r = 2r$, $z_{rr} = 2$, $z_\theta = z_{\theta\theta} = 0$ より $2 + \frac{1}{r} \cdot 2r + 0 = 2 + 2 = 4$ で一致する。)