

NO.

0111

有限区間における複素指数関数の積分と sinc 関数

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて複素指数関数の積分を計算し、実部・虚部を比較することで実積分の値を求める。

$k \neq 0$ のとき $\lambda = -ik \neq 0$ として原始関数を求めると

$$\int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-a}^a = \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik}$$

オイラーの公式より $e^{-ika} = \cos(ka) - i \sin(ka)$, $e^{ika} = \cos(ka) + i \sin(ka)$ であるから

$$e^{-ika} - e^{ika} = -2i \sin(ka)$$

よって

$$\int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{-2i \sin(ka)}{-ik} = \frac{2 \sin(ka)}{k}$$

これを $2a$ で括り直すと

$$\frac{2 \sin(ka)}{k} = 2a \cdot \frac{\sin(ka)}{ka}$$

したがって

$$\int_{-a}^a e^{-ikx} dx = 2a \operatorname{sinc}(ka)$$

(検算: 被積分関数の実部 $\cos(kx)$ は偶関数なので $\int_{-a}^a \cos(kx) dx = 2 \int_0^a \cos(kx) dx = \frac{2 \sin(ka)}{k}$ となり実部が一致し、虚部 $-\sin(kx)$ は奇関数なので積分は 0 となって結果が実数であることも整合する。また $k \rightarrow 0$ の極限では $\operatorname{sinc}(0) = 1$ より積分値は $2a$ に収束し、これは $\int_{-a}^a 1 dx = 2a$ と一致する。)