

NO.

0112

複素指数関数を用いた指数関数と余弦関数の積の不定積分

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて複素指数関数の積分を計算し、実部・虚部を比較することで実積分の値を求める。

$e^{ax} \cos(bx) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$ であるから、まず複素指数関数の積分を計算する。 $\lambda = a + ib \neq 0$ として

$$\int e^{(a+ib)x} dx = \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} + C_1$$

分母を実数化するため $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ を用いると

$$\frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

右辺を展開して実部を取ると

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \right] = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

したがって

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

(検算: 右辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \right] = \frac{a e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + e^{ax} (-ab \sin bx + b^2 \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

分子を整理すると $e^{ax} [(a^2 + b^2) \cos bx + (ab - ab) \sin bx] = (a^2 + b^2) e^{ax} \cos bx$ となるので、全体は $e^{ax} \cos bx$ に一致し、確かに元の被積分関数に戻る。)