

NO.

0114

ガウス積分の極座標変換による導出とそのスケーリング

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

とおく。 $I > 0$ であり、

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ここで極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) に変換すると、面積要素は $dx dy = r dr d\theta$ であるから

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$I > 0$ より

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

続いて $t = \sqrt{a} x$ と置換すると $dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$ であり、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $t \rightarrow \pm\infty$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

検算: $a = 1$ のとき $\sqrt{\pi/1} = \sqrt{\pi}$ となり最初の結果と一致する。