

NO.

0115

ガウス型積分の奇関数・偶関数モーメント（パラメータ微分）

(2) は $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$ を a の関数とみて、 a で微分することで求められる。

(1) $u = ax^2$ とおくと $du = 2ax dx$ より

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2a} [-e^{-u}]_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{2a}}$$

検算: $a = 1$ のとき値は $1/2$ 。数値積分の値と一致することが知られている。

(2) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} a^{-1/2}$ を a で微分すると（被積分関数が十分滑らかで積分と微分の順序交換が正当化できる）

$$F'(a) = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

一方

$$F'(a) = \sqrt{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) a^{-3/2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$$

両辺を比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}}$$

検算: $a = 1$ のとき、部分積分により $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 0 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となり、公式に $a = 1$ を代入した値と一致する。