

NO.

0116

平方完成によるガウス型積分の一般化（1次項付き）

指数部を平方完成すると

$$-ax^2 + bx = -a \left(x^2 - \frac{b}{a}x \right) = -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a}$$

よって $t = x - \frac{b}{2a}$ とおくと（ $dt = dx$ 、積分域は不変）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}}$$

$a = 1$, $b = 2$ の場合はこの公式に代入して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2x} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{4}{4}} = \boxed{\sqrt{\pi} e}$$

検算: $-x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ であるから、 $t = x-1$ とおくと $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-1)^2+1} dx = e \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = e\sqrt{\pi}$ となり一致する。