

NO.

0117

極座標変換と球座標変換のヤコビ行列式

(i) 極座標。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$$

よって

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

(検算: $r \geq 0$ のとき面積要素 $r dr d\theta$ は常に非負であり、原点 $r = 0$ で 0 になることも幾何的に正しい。)

(ii) 球座標。

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

第 3 行に沿って余因子展開すると

$$= \cos \theta \det \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} - (-r \sin \theta) \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

第 1 項の行列式は $r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = r^2 \sin \theta \cos \theta$ 、第 2 項の行列式は $r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = r \sin^2 \theta$ であるから、

$$= \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \cos \theta + r \sin \theta \cdot r \sin^2 \theta = r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

よって

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

(検算: $\theta \in [0, \pi]$ で $\sin \theta \geq 0$ なので体積要素 $r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ は非負。 $r = 0$ または $\theta = 0, \pi$ (z 軸上) で退化して 0 になることも座標特異点の位置と一致し、球の体積 $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$ という既知の公式を再現する。)