

NO.

0118

1 次変換 $u=x+y, v=x-y$ による重積分の計算

$u = x + y, v = x - y$ とおくと、逆変換は

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

であり、

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

であるから、逆関数定理より

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\partial(u, v)/\partial(x, y)} = -\frac{1}{2}, \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$$

(検算: 直接 $x_u = \frac{1}{2}, x_v = \frac{1}{2}, y_u = \frac{1}{2}, y_v = -\frac{1}{2}$ を用いて $\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ となり、同じ値を得る。)

また

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$$

であり、積分領域は $u = x+y \in [0, 1], v = x-y \in [0, 1]$ という条件から、 D は $D' = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ (単位正方形) に写る。したがって

$$I = \iint_{D'} uv e^u \cdot \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 u e^u du \right) \left(\int_0^1 v dv \right)$$

部分積分により

$$\int_0^1 u e^u du = [u e^u - e^u]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

また $\int_0^1 v dv = \frac{1}{2}$ であるから

$$I = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(検算: 数値積分によっても $I = 1/4 = 0.25$ と一致することを確認できる。)