

NO.

0119

極座標変換を用いた四分円板上の広義重積分の計算

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を用いる。ヤコビ行列式は $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$ である（問題 0117 の結果と同じ計算による）。領域 D は第 1 象限内の半径 2 の円板の内部であるから、 (x, y) 平面の D は (r, θ) 平面の

$$D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

に対応する。また $x^2 + y^2 = r^2$ より被積分関数は $\frac{1}{\sqrt{4-r^2}}$ となるから、

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r \, dr \, d\theta$$

r に関する積分は、 $t = 4 - r^2$ とおくと $dt = -2r \, dr$ より

$$\int_0^2 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \, dr = \left[-\sqrt{4-r^2} \right]_0^2 = -0 - (-2) = 2$$

（ $r \rightarrow 2^-$ でも被積分関数は可積分特異点であり、この広義積分は収束する。）よって

$$I = \int_0^{\pi/2} 2 \, d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$$

（検算：極座標での数値積分によっても $I = \pi \approx 3.1416$ と一致することを確認できる。）