

NO.

0120

累次積分の積分順序の交換（三角形領域、 e^{x^2} の積分）

連続関数 $f(x, y)$ が有界閉領域 D 上で定義されているとき、 D を

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

のように x を先に固定して y の範囲を表す「縦線集合」として書ける場合、重積分は

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

と累次積分に書き換えられる（Fubini の定理）。同じ領域 D を「横線集合」

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

として表せば、積分順序を交換して

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

としてもよい。両者は同じ重積分の値を与える。 x 積分が初等関数で書けない場合（例えば e^{x^2} ）でも、順序を交換することで積分可能になることがある。

積分領域は $0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$ である。これは

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x$$

と同じ領域を表す（ x - y 平面上で直線 $y = x$ の下側、 $0 \leq x \leq 1$ の三角形領域）。したがって積分順序を交換すると

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$$

内側の積分は x を定数とみて

$$\int_0^x e^{x^2} dy = x e^{x^2}$$

よって

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

となるから

$$\boxed{\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy = \frac{e-1}{2}}$$

（検算: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) = x e^{x^2}$ なので原始関数の計算は正しい。また元の積分順序のままでは $\int e^{x^2} dx$ が初等関数で表せないため、順序交換が本質的である。）