

NO.

0121

極座標変換による扇形領域上の $\sqrt{x^2 + y^2}$ の重積分

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) と変数変換すると、ヤコビ行列は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

であり、そのヤコビアン（行列式）は

$$J = \cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \cdot \sin \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

となる。したがって面積要素は $dx dy = |J| dr d\theta = r dr d\theta$ と変換され、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

が成り立つ (D' は D を (r, θ) 平面に写した領域)。

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと、 D は第 1 象限の半径 2 の扇形なので

$$D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

に対応する。 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ 、面積要素は $dx dy = r dr d\theta$ であるから

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r \cdot r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 r^2 dr \right) d\theta$$

内側の積分は

$$\int_0^2 r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

であるから

$$\int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} d\theta = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$$

よって

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{4\pi}{3}$$

(検算: 半径 2、中心角 $\pi/2$ の扇形の「重み付き面積」として、 $r = 2$ での被積分関数の最大値は 2、扇形の面積は $\pi \cdot 2^2/4 = \pi$ であるから、答え $4\pi/3 \approx 4.19$ は 0 から $2\pi \approx 6.28$ の間に収まり妥当である。)