

NO.

0122

曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ の下側の体積（極座標変換）

連続関数 $z = f(x, y) \geq 0$ のグラフと平面 $z = 0$ 、および底面 D とで囲まれる立体の体積は

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

で与えられる。これは、 D を微小面積 dA に分割し、各微小面積の上に高さ $f(x, y)$ の柱を立てて体積 $f(x, y) dA$ を足し合わせる（リーマン和の極限をとる）ことから従う。回転対称な曲面（例えば $z = f(x^2 + y^2)$ ）の場合は、極座標変換により積分が簡単になることが多い。

$z \geq 0$ となるのは $x^2 + y^2 \leq 4$ のときであるから、底面領域は

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

であり、求める体積は

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$$

極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) を用いると、 $x^2 + y^2 = r^2$ であるから

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) dr d\theta$$

内側の積分は

$$\int_0^2 (4r - r^3) dr = \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = (8 - 4) - 0 = 4$$

であるから

$$V = \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$$

よって

$$V = 8\pi$$

（検算：この立体は放物面 $z = 4 - r^2$ ($0 \leq r \leq 2$) を底面とする回転体であり、円柱殻の方法でも

$$V = \int_0^2 2\pi r (4 - r^2) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ と一致し、答えが正しいことが確認できる。}$$