

NO.

0124

グリーンの定理による閉曲線に沿う線積分の計算

$P = x^2y, Q = xy^2 + 2x$ とおくと

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + 2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2$$

P, Q は D (半径 2 の円板) 上で C^1 級であり、 C はこれを正の向き (反時計回り) に囲む単純閉曲線であるから、グリーンの定理より

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (y^2 + 2 - x^2) dx dy$$

円板 D は $x \leftrightarrow y$ の入れ替えに関して対称であるから

$$\iint_D x^2 dA = \iint_D y^2 dA$$

となり、 $\iint_D (y^2 - x^2) dA = 0$ 。したがって

$$\iint_D (y^2 + 2 - x^2) dA = 2 \iint_D dA = 2 \times (\text{面積}) = 2 \times \pi(2)^2 = 8\pi$$

ゆえに

$$\oint_C (x^2y) dx + (xy^2 + 2x) dy = 8\pi$$

(検算: 極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ で直接計算すると $\iint_D (y^2 - x^2 + 2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta + 2) r dr d\theta$ 。 θ について $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$ を 0 から 2π まで積分すると 0 になるので、残るのは $\int_0^{2\pi} \int_0^2 2r dr d\theta$ であり、 $\int_0^2 2r dr = 4$ 、これを θ について 0 から 2π まで積分すると 8π となり一致する。)