

NO.

0125

保存場の判定とポテンシャル関数による線積分の計算

単連結領域 D 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F} = (P, Q)$ が、あるスカラー関数 $\phi(x, y)$ (ポテンシャル) を用いて $\mathbf{F} = \nabla\phi$ と表せるとき、 $\mathbf{F}$ を保存場と呼ぶ。 D が単連結で P, Q が C^1 級るとき、 $\mathbf{F}$ が保存場であるための必要十分条件は $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ が D 上で成り立つことである。

(1) $P = 2xy + \cos x$, $Q = x^2 + 2y$ とおく。

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

xy 平面全体 (単連結領域) で $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ が成り立つので、 $\mathbf{F}$ は保存場である。

(2) $\phi_x = P = 2xy + \cos x$ を x について積分すると

$$\phi(x, y) = x^2y + \sin x + g(y)$$

(g は y の任意関数)。これを y で偏微分すると $\phi_y = x^2 + g'(y)$ であり、これが $Q = x^2 + 2y$ に等しいことから $g'(y) = 2y$ 、すなわち $g(y) = y^2 + C_0$ (定数 C_0 は 0 としてよい)。したがって

$$\phi(x, y) = x^2y + \sin x + y^2$$

(検算: $\phi_x = 2xy + \cos x = P$ 、 $\phi_y = x^2 + 2y = Q$ となり、確かに $\nabla\phi = \mathbf{F}$ 。)

(3) 保存場であり経路によらないから、

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, \pi) - \phi(0, 0)$$

$$\phi(1, \pi) = 1^2 \cdot \pi + \sin 1 + \pi^2 = \pi + \sin 1 + \pi^2, \quad \phi(0, 0) = 0$$

したがって

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi^2 + \pi + \sin 1$$

(検算: 例えば直線経路 $x = t$, $y = \pi t$ ($0 \leq t \leq 1$) に沿って直接計算しても、 $dx = dt$, $dy = \pi dt$ より $\int_0^1 [(2t \cdot \pi t + \cos t) \cdot 1 + (t^2 + 2\pi t) \cdot \pi] dt = \int_0^1 (3\pi t^2 + \cos t + 2\pi^2 t) dt = \pi + \pi^2 + \sin 1$ となり一致する。)